Domácí úkol 8

Termín odevzdání: 1. 5. 2025 do večera

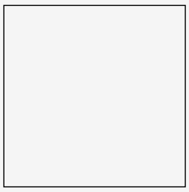
1.)

Najděte $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takové, že zároveň platí

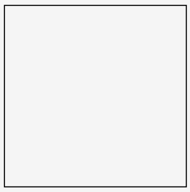
- $\operatorname{int} A = \emptyset$
- B je otevřená
- $\overline{A \cup B} = [0; 1] \times [0; 1]$ (čtverec)
- $\partial(A \cap B) = [0; 1] \times [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ (obdélník)
- bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) \in \operatorname{ext} B$

Řešení: Ze třetí podmínky plyne, že obě množiny musí být podmnožinou čtverce $[0; 1] \times [0; 1]$. Začněme s představou, že A i B je celý tento čtverec a postupně přidáváním dalších podmínek množiny osekejme.

A

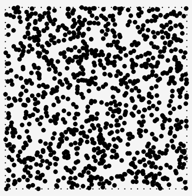


B

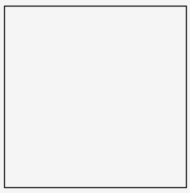


• **int $\boldsymbol{A = \emptyset}$** - nám říká, že množina A v sobě obsahuje spoustu "děr". Tuto vlastnost mají vůči sobě podmnožiny čistě racionálních nebo iracionálních čísel. Uvažujme $A = \big([0; 1] \times [0; 1]\big) \cap \mathbb{Q}^2$.

A

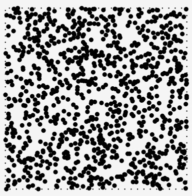


B

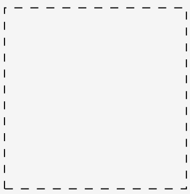


• ***B* je otevřená** - jednoduše splníme, pokud z B vyloučíme hranici čtverce a zůstane nám $B = (0; 1) \times (0; 1)$.

A

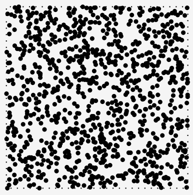


B

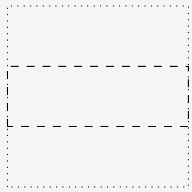


- $\boldsymbol{\partial(A \cap B) = [0;1] \times [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]}$ - nás nutí alespoň jednu z množin zmenšit, třeba právě B na obdélník $(0;1) \times (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Pak bude průnik $A \cap B = \big((0;1) \times (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})\big) \cap \mathbb{Q}^2$, jehož uzávěr bude celý obdélník $[0;1] \times [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$. Vzhledem k tomu, že $\operatorname{int} A = \emptyset$, tak také $\operatorname{int}(A \cap B) = \emptyset$. A jelikož pro všechny množiny platí $\overline{M} = (\operatorname{int} M) \cup \partial M$, musí platit $\partial(A \cap B) = [0;1] \times [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$

A

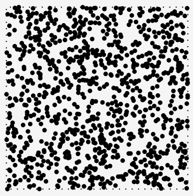


B

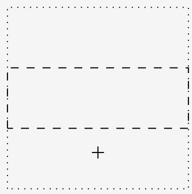


- **bod** $\boldsymbol{(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}) \in \operatorname{ext} B}$ - díky chytrému zmenšení množiny B v předchozím kroku je tato podmínka již splněna.

A

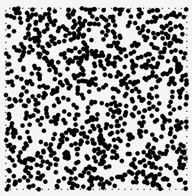


B

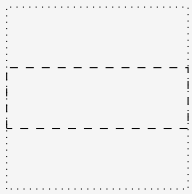


Závěr tedy zní:

$$A = \big([0;1] \times [0;1]\big) \cap \mathbb{Q}^2$$



$$B = (0;1) \times \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$



□

2.)

Rozhodněte pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2+y^2}-1}{x^2+\frac{y^2}{a}}$$

a limitu spočtěte.

Řešení: Zkusme nejprve, jak se bude limita chovat pokud k počátku půjdeme po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(2+k^2)x^2}-1}{(1+\frac{k^2}{a})x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(2+k^2)x^2}-1}{(2+k^2)x^2} \frac{(2+k^2)x^2}{(1+\frac{k^2}{a})x^2} = \frac{a(2+k^2)}{a+k^2}$$

Abychom měli naději, že limita bude existovat, výsledek musí vyjít pro všechna k stejně, a tedy nesmí na k záviset.

$$\frac{a(2+k^2)}{(a+k^2)} = C$$
$$ak^2 + 2a = Ck^2 + Ca$$

To platí, zjevně pouze pro volbu $a = C = 2$.

Nyní se pouze přesvědčíme, že pro $a = 2$ limita skutečně existuje (nejen pro případ, že se blížíme po přímkách). Použijeme přepis do polárních souřadnic.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x^2+y^2}-1}{x^2+\frac{y^2}{2}} = 2\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2(1+\cos^2(\varphi))}-1}{r^2(1+\cos^2(\varphi))} = 2$$

V poslední rovnosti využíváme větu o limitě sloužené funkce a faktu, že $r^2(1+\cos^2(\varphi))$ je v limitě výraz typu "$0\cdot$*omezené*"a tudíž jde do 0.

□