Domácí úkol 6

Termín odevzdání: 16. 4. 2025 do večera

1.)

Rozhodněte o absolutní či neabsolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\Big(\ln\big(\ln(n)\big)\Big)}.$$

Řešení: Nejprve krátce zkontrolujme absolutní konvergenci. Na tu tady není ani pomyšlení, neboť určitě platí

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\Big(\ln\big(\ln(n)\big)\Big)} \geq \frac{1}{n}$$

pro dost velká n.

Podle Leibnizova kriteria můžeme rozhodnout, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln\Big(\ln\big(\ln(n)\big)\Big)}$$

konverguje, jelikož jmenovatel je monotónně rostoucí funkce. Poté již stačí jen použít Abelovo kriterium. K tomu potřebujeme aby posloupnost $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ byla monotónní a omezená. Omezenost plyne čistě z faktu, že tato posloupnost má konečnou limitu. Monotónnost dokážeme pro dost velká n.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n} &\geq \sqrt[n+1]{n+1} \\
\frac{\ln(n)}{n} &\geq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
\frac{n+1}{n} &\geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \\
1+\frac{1}{n} &\geq \frac{\ln(n)+\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)} \\
1+\frac{1}{n} &\geq 1+\frac{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

Řada proto konverguje neabsolutně.

□

2.)

Diskutujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady v závislosti na parametru $q \in \mathbb{R}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right).$$

Řešení: Řadu rozdělíme na několik činitelů a o každém z nich budeme schopni přiřadit nějakou vlastnost, která se uplatní v nějakém z kritérií.

Nejprve se zaměřme čistě na konvergenci (ne nutně absolutní). Upravme jednotlivé členy pomocí součtových vzorců a vzorců pro dvojnásobný úhel.

$$\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{n^2+n-n}{n+1}\right) = \sin\left(n-\frac{n}{n+1}\right) =$$
$$= \sin(n)\cos\left(\frac{n}{n+1}\right) - \cos(n)\sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\left(1-\cos\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q = \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q$$

Dostáváme tedy řady dvě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right) -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\sin\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right)$$

Všimněme si, že pro $q \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, všichni činitelé jsou omezení a monotónní až na $\sin(n)$, resp. $\cos(n)$, který nemá limitu.

Pro $q > 0$ tvrdíme, že

- člen $\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q$ jde od určitého dost velkého n monotónně k nule. To je celkem zřejmé vzhledem k tomu, že na okolí nuly jde pouze o skládání zjevně monotónních funkcí.
- člen $\operatorname{arctg}(n+\frac{1}{n^{1000}})$ jde od jistého velkého n monotónně k limitě $\frac{\pi}{2}$. To vyplývá z faktu, že argument je pro velké n monotónní: $n+\frac{1}{n^{1000}} < n+1 < (n+1)+\frac{1}{(n+1)^{1000}}$
- člen $\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$, resp. $\sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$, konverguje od jistého n monotónně k $\cos(1)$, resp. $\sin(1)$.
- člen $\sin(n)$, resp. $\cos(n)$, má omezené částečné součty.

Z toho můžeme vyvodit, že řada konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin(n)\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q}_{\text{Dirichletovo krit.}} \cos\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{Abelovo krit.}} \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right)}_{\text{Abelovo krit.}} - \dots \qquad (\heartsuit)$$

a analogicky pro druhou řadu.

Nyní se podíváme na absolutní konvergenci. Odhadněme původní řadu seshora řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right| \left|1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right).$$

Tu můžeme srovnat s řadou $\sum \frac{1}{n^{2q}}$ a dostat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right)}{\frac{1}{n^{2q}}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^q}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^{2q}\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{(2n)^{2q}}} = \frac{\pi}{2^{q+1}}$$

Jelikož jsme původní řadu odhadli seshora, máme jistotu, že pro $q > \frac{1}{2}$ konverguje absolutně. Nyní dokážeme, že pro $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ konvergujeme neabsolutně. Použijeme tentokrát odhad zespoda, a to $\left|\sin(x)\right| \geq \sin^2(x)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right| \left|1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right|^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right) \geq$$
$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2n^2}{n+1}\right)\right)\left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n+\frac{1}{n^{1000}}\right) =$$

Tuto řadu roznásobením a součtovými vzorci pro cos roztrhneme na tři části.

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n + \frac{1}{n^{1000}}\right)}_{\text{diverguje srovnáním s } \frac{1}{n^{2q}}} -$$

$$- \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cos(2n) \cos\left(\frac{2n}{n+1}\right) \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n + \frac{1}{n^{1000}}\right)}_{\text{konverguje stejně jako } (\heartsuit)} -$$

$$- \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin(2n) \sin\left(\frac{2n}{n+1}\right) \left(2\sin^2\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^q \operatorname{arctg}\left(n + \frac{1}{n^{1000}}\right)}_{\text{konverguje stejně jako } (\heartsuit)}$$

Jelikož dvě části řady konvergují, zatímco třetí diverguje, máme jistotu, že řada jako celek určitě diverguje. Proto řada nekonverguje absolutně pro $q \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Závěr:

- pro $q \leq 0$ řada diverguje
- pro $q \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ řada konverguje neabsolutně
- pro $q > \frac{1}{2}$ řada konverguje absolutně

$\square$