Domácí úkol 5

Termín odevzdání: 9. 4. 2025 do cvičení

1.)

Rozhodněte zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Řešení: Využijeme limitního odmocninového kritéria. Spočteme příslušnou limitu, pokud bude menší než 1, znamená to, že řada konverguje.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Řada skutečně konverguje.

$\square$

2.)

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (4n)}{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n+3)} \right)^p$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$. (Pro účely úkolu stačí jít maximálně po *Raabeho kriterium*)

Řešení: Učiňme nejprve pozorování, že pro $p \leq 0$ určitě nebudeme konvergovat, protože nesplníme nutnou podmínku konvergence. Dále zkusme zjistit, co nám dá za informaci podílové kritérium. Jde o řadu s členy ve formě s dlouhými součiny - podílové kritérium je tedy ideální volba. Zároveň spočtený podíl můžeme případně použít i v dalších kriteriích.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (4n) \cdot (4n+4)}{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n+3) \cdot (4n+7)} \right)^p}{\left(\frac{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (4n)}{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n+3)} \right)^p} = \left(\frac{4n+4}{4n+7} \right)^p$$

Spočteme nyní limitu tohoto výrazu, využijeme *větu o limitě složené funkce* a faktu, že x^p je spojitá v 1.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n+4}{4n+7} \right)^p = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{4n+4}{4n+7} \right)^p = 1^p = 1$$

Limita nám vyšla 1 pro všechna $p > 0$, tudíž o konvergenci nemůžeme říct vůbec nic. Musíme přistoupit k silnějším nástrojům jako je *Raabeho kriterium*.

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\left(\frac{4n+7}{4n+4} \right)^p - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{(4n+7)^p - (4n+4)^p}{(4n+4)^p} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \frac{4^p n^p (1 + \frac{7}{4n})^p - 4^p n^p (1 + \frac{1}{n})^p}{4^p n^p (1 + \frac{1}{n})^p} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^p n^p \left(1 + \frac{7p}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - 4^p n^p \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{4^p n^{p-1} (1 + \frac{1}{n})^p} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \left(1 + \frac{7p}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - n \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{(1 + \frac{1}{n})^p} = \frac{3p}{4}$$

Podle Raabeho můžeme číst, že pokud bude

- $p < \frac{4}{3}$, řada diverguje
- $p > \frac{4}{3}$, řada konverguje

Pro $p = \frac{4}{3}$ musíme udělat extra analýzu (nepovinnou v úkolu). Použijeme Gaussovo kriterium. Přepišme daný podíl do tvaru

$$\left(\frac{4n+7}{4n+4} \right)^{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{(4n+7)^{\frac{4}{3}} - (4n+4)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{n}(4n+4)^{\frac{4}{3}}}{(4n+4)^{\frac{4}{3}}}.$$

Podíváme se na chování čitatele v nekonečnu.

$$
\begin{aligned}
&(4n+7)^{\frac{4}{3}} - (4n+4)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{n}(4n+4)^{\frac{4}{3}} = \\
&(4n)^{\frac{4}{3}} \left(\left(1+\frac{7}{4n}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}} \right) \sim \\
&\sim (4n)^{\frac{4}{3}} \left(\left(1+\frac{7}{3n}+\frac{49}{72n^2}\right) - \left(1+\frac{4}{3n}+\frac{4}{18n^2}\right) - \frac{1}{n}\left(1+\frac{4}{3n}+\frac{4}{18n^2}\right) \right) \sim \\
&\sim (4n)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{49}{72n^2} - \frac{16}{72n^2} - \frac{96}{72n^2} \right) = -4^{\frac{4}{3}} \frac{7}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = -\frac{7\sqrt[3]{4}}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že čitatel je sám o sobě v nekonečnu omezený, můžeme tedy psát podíl ve tvaru

$$
\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{t_n}{n^{\frac{4}{3}}},
$$

kde

$$
t_n = \frac{(4n+7)^{\frac{4}{3}} - (4n+4)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{n}(4n+4)^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}},
$$

což je podle naší předchozí analýzy omezený výraz pro $n \to \infty$. Řada tedy diverguje i pro $p = \frac{4}{3}$.

$\square$