Domácí úkol 4

Termín odevzdání: 26. 3. 2025 do cvičení

1.)

Na intervalu $(0, \infty)$ najděte řešení Cauchyho úlohy (rovnice s počáteční podmínkou)

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{y}, \qquad y(4) = 1.$$

Řešení: Jedná se o tzv. Bernoulliovu rovnici, která má obecný tvar

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Srovnáme se zadáním a vidíme, že v našem případě $\alpha = \frac{1}{2}$.

Začněme poznatkem o definičních oborech. Je zjevné, že musí platit $y > 0$ (pod odmocninou). Dále víme, že rovnice není definována pro $x = 0$. V takovém případě hledáme obecné řešení na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ zvlášť. Ovšem vzhledem k tomu, že řešíme Cauchyho úlohu s počáteční podmínkou v kladných číslech, stačí nám prošetřit pouze druhý interval (tak jak je psáno v zadání).

Rovnice Bernoulliho typu se standardně řeší pomocí substituce $z = y^{1-\alpha}$. Všimněme si, že jelikož je $\alpha = \frac{1}{2}$ kladné, identické $y \equiv 0$ je stacionárním řešením. Jinde, na intervalu, kde není y nulové, můžeme nelineárním členem vydělit a dostat tvar

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{1}{x}\sqrt{y} = 1.$$

Nyní přišel správný okamžik na užití substituce $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$, pro kterou platí také $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = \frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}}$. Proto můžeme hned dosadit do rovnice a psát

$$\begin{aligned} 2z' + \frac{1}{x}z &= 1 \\ z' + \frac{1}{2x}z &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

čímž jsme rovnici převedli na klasickou lineární rovnici 1. řádu. Pokračujme metodou integračního faktoru.

$$IF = \exp\left(\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \sqrt{x}$$

Rovnici faktorem vynásobíme a levou stranu smrštíme do tvaru derivace:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}z' + \frac{1}{2\sqrt{x}}z &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\ \left(\sqrt{x}z\right)' &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\ \sqrt{x}z &= \int \frac{\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Dostáváme obecný tvar pro z na intervalu $(0, \infty)$

$$z = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Nyní zpět vrátíme substituci $z = \sqrt{y}$ a POZASTAVÍME SE.

$$\sqrt{y} = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Původní rovnice není lineární v tomto duchu nese jisté podobnosti s rovnicí na separované proměnné; řešení může mít pro nějaká C omezení na definiční obor x. Také vidíme, že rovnice (funkce v ní) není Lipschitzovsky spojitá vzhledem k y v 0; můžeme čekat případ lokální nejednoznačnosti a větvení řešení. Z posledního tvaru jasně dostáváme podmínku

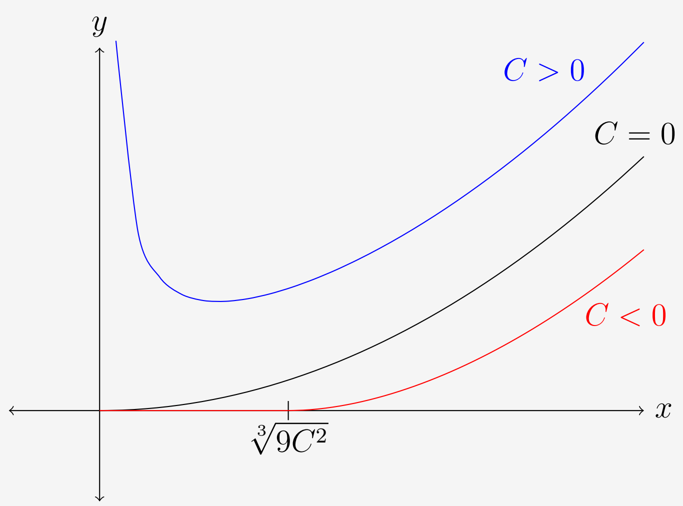
$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}} &> 0 \\ x^{\frac{3}{2}} &> -3C \\ x &> \sqrt[3]{9C^2}, \end{aligned}$$

pro $C < 0$. Pro $C \geq 0$ zůstává definiční obor stále stejný. Tam, kde končí netriviální řešení, se ale můžeme nalepit na řešení stacionární a tím mít řešení vždy definované na celém intervalu $(0, \infty)$.

Obecné řešení proto vypadá následovně

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2, \quad x \in (0, \infty) \qquad \text{pro } C \geq 0$$

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (0, \sqrt[3]{9C^2}) \\ \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2, & x \in (\sqrt[3]{9C^2}, \infty) \end{cases} \qquad \text{pro } C < 0$$



Nakonec zbývá najít právě to řešení které splňuje počáteční podmínku.

$$\begin{aligned} y(4) &= 1 \\ \left(\frac{4}{3} + \frac{C}{2}\right)^2 &= 1 \\ \frac{4}{3} + \frac{C}{2} &= \pm 1 \\ C &= \frac{-8 \pm 6}{3} \end{aligned}$$

$$C_1 = -\frac{2}{3} \qquad\qquad C_2 = -\frac{14}{3}$$

Obě C vyšla záporně, tedy jde o řešení, které je nenulové pouze na intervalu $(\sqrt[3]{9C^2}, \infty)$. Musíme si dát pozor, aby bod 4 v tomto intervalu byl. To platí pouze pro $C_1 = -\frac{2}{3}$, jelikož

$$\sqrt[3]{9(-\frac{2}{3})^2} = \sqrt[3]{4} < 4 < \sqrt[3]{196} = \sqrt[3]{9(-\frac{14}{3})^2}$$

Námi hledané řešení je tedy ve tvaru

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (0, \sqrt[3]{4}) \\ \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2, & x \in (\sqrt[3]{4}, \infty) \end{cases}$$

$\square$

2.)

Najděte všechna řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2 e^{3x} + \frac{1}{1+e^{-2x}}.$$

HINT: Využijte linearity rovnice, jednou použijte *Speciální pravou stranu*, jednou *Variaci konstant.*

Řešení: Jde o lineární rovnici s konstantními koeficienty. Nejprve najdeme fundamentální systém, tj. bázi prostoru všech řešení homogenní rovnice. Charakteristický polynom je následující

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Do fundamentálního systému tedy přidáme dvě funkce a to

$$\mathrm{FS} = \{e^x, e^{2x}\}.$$

Nyní musíme najít partikulární řešení, jak napovídá zadání, je možné si tento problém rozdělit díky linearitě rovnice a najít nejprve partikulární řešení s pravou stranou $4x^2e^{3x}$ pomocí *Speciální pravé strany* a poté druhé s pravou stranou $\frac{1}{1+e^{-2x}}$ pomocí *Variace konstant.*

1 Speciální pravá strana

Nejprve tedy řešme rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2 e^{3x}.$$

Tento typ je přesně ve tvaru speciální pravé strany

$$e^{\mu x}\left[P_1(x)\cos(\nu x) + P_2(x)\sin(\nu x)\right]$$

pro $\mu = 3, \nu = 0, P_1(x) = 4x^2$ a $P_2(x) \equiv 0$. Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p &= e^{\mu x}x^k\left[Q_1(x)\cos(\nu x) + Q_2(x)\sin(\nu x)\right] = \\ &= e^{3x}(Ax^2 + Bx + C), \end{aligned}$$

protože 3 není kořenem char. polynomu ($k = 0$) a Q_1 je maximálně kvadratický. Zderivujme řešení dvakrát a dosaďme do rovnice, tím získáme hodnoty parametrů A, B a C.

$$\begin{aligned} y_p' &= 3e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{3x}(2Ax + B) \\ y_p'' &= 9e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + 6e^{3x}(2Ax + B) + e^{3x}(2A) \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= 2e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + 3e^{3x}(2Ax + B) + e^{3x}(2A) = \\ &= e^{3x}\left(2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C)\right) = 4x^2e^{3x} \end{aligned}$$

$$A = 2 \qquad B = -6 \qquad C = 7$$

Našli jsme část partikulárního řešení a to

$$y_{pI} = e^{3x}\left(2x^2 - 6x + 7\right).$$

2 Variace konstant

V tento moment chceme najít partikulární řešení rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-2x}}.$$

Použijeme metodu variace konstant, která vychází z ansatzu

$$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}.$$

Stačí najít vhodné funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$. Takových funkcí je jistě mnoho, my si však na ně dáme speciální požadavek, díky kterému je snáze najdeme. Jsou to tyto rovnice:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} &= 0 \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} &= \frac{1}{1+e^{-2x}}. \end{aligned}$$

Tato soustava není příliš velká, zvládneme ji vyřešit prostými úvahami a vhodným sčítáním obou rovnic. Nejprve odečtěme první rovnici od druhé, tím vykrátíme $C_1'(x)$ a zbude vzorec pro $C_2'(x)$.

$$\begin{aligned} C_2'(x)e^{2x} &= \frac{1}{1+e^{-2x}} \\ C_2(x) &= \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = e^{-2x} \\ \mathrm{d}t = -2e^{-2x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

Dosaďme do první rovnice a dopočtěme také $C_1(x)$.

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + \frac{1}{1+e^{-2x}} &= 0 \\ C_1(x) &= -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = e^{-x} \\ \mathrm{d}t = -e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg}(e^{-x}) \end{aligned}$$

Nyní máme i druhou část partikulárního řešení

$$y_{pII} = \operatorname{arctg}(e^{-x})e^x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)e^{2x}$$

Dohromady můžeme psát úplné obecné řešení zadané rovnice

$$y = (2x^2 - 6x + 7)e^{3x} + \operatorname{arctg}(e^{-x})e^x - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)e^{2x} + D_1e^x + D_2e^{2x},\ \text{kde } D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

□