Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 20. 3. 2025 do večera

1.)

Nalezněte všechna řešení rovnice

$$y' = \frac{3e^x}{(1+e^x)y}.$$

(Určete také intervaly, na kterých jsou definována)

Řešení: Postupujme podle postupu v kuchařce

1 - Definiční obory

Podívejme se jestli nemáme omezení na definiční obor pravé strany. Díky kladnému znaménku exponenciály nedostáváme žádné omezení na definiční obor pro x, nicméně pro y zjevně čteme podmínku $y \neq 0$.

2 - Stacionární řešení

Opět rychle nahlédneme, jestli není pro nějaké y pravá strana identicky nulová (a jednalo by se tak o stacionární řešení), ale v našem příkladě tomu tak není.

3 - Separace proměnných

Za předpokladu, že se respektujeme definiční obory a vyhneme se stacionárním řešením (ty stejně nemáme), můžeme proměnné separovat a dostat

$$yy' = \frac{3e^x}{1+e^x}. \tag{SP}$$

Obě strany nyní integrujme vzhledem k x. Na levé straně použijeme standardní substituci $y = y(x)$ (typickou pro separaci proměnných), napravo poté integrál vypočteme pomocí *1. věty o substituci.*

$$\int yy' \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = y(x) \\ dy = y'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2$$

$$\int \frac{3e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{3}{1+t}\,\mathrm{d}t = 3\ln\big(|1+t|\big) + C = 3\ln(1+e^x) + C$$

Konečně dostáváme mezi y a x bez integrálů a derivací

$$y^2 = 6\ln(1+e^x) + C,$$

kde jsme se mohli zbavit absolutní hodnoty v logaritmu díky kladnému znaménku, které má výraz uvnitř. Než však z této rovnice začneme vyjadřovat y, zkontrolujme obory hodnot obou stran.

④ - Omezení na obor x v závislosti na C

Obor hodnot levé strany rovnice jsou všechna kladná čísla (nulu jsme si zakázali v kroku ①). Nyní je potřeba, aby pro dané C, nabývala také pravá strana přípustných hodnot.

Je zjevné, že člen s logaritmem je vždy kladný, jelikož jeho argument je větší než 1. Pro $C \geq 0$ se tak automaticky pohybujeme v kladných číslech a žádné omezení na x nedostaneme.

Pro $C < 0$ si musíme dát větší pozor, nyní se můžeme dostat i do záporných čísel. Proto si to musíme ohlídat speciální podmínkou

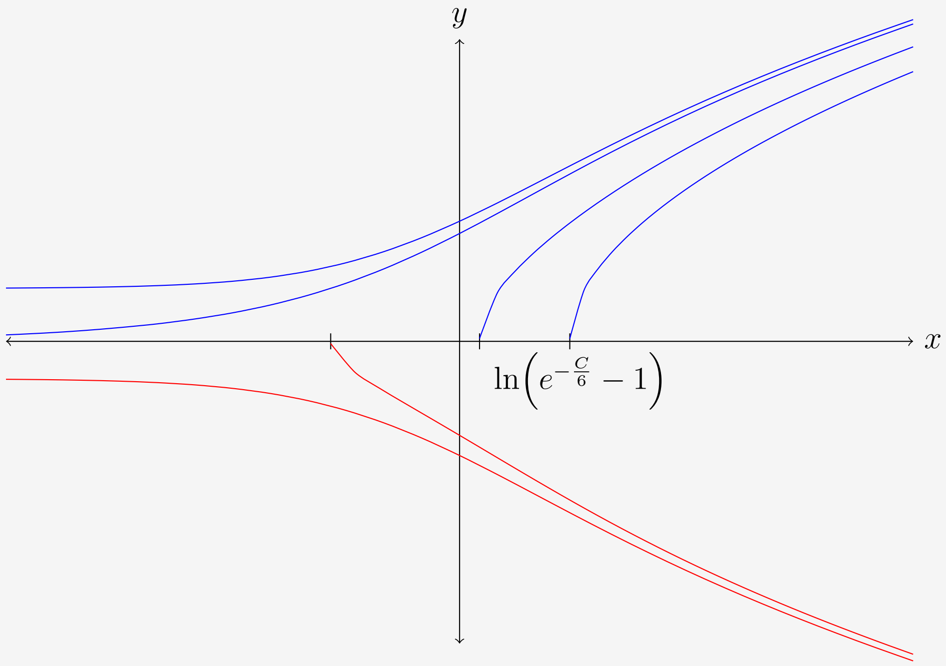
$$\begin{aligned} 6\ln(1+e^x) + C &> 0 \\ \ln(1+e^x) &> -\frac{C}{6} \\ e^x &> e^{-\frac{C}{6}} - 1 \\ x &> \ln\left(e^{-\frac{C}{6}} - 1\right). \end{aligned}$$

Jakmile jsme si pohlídali obory hodnot, můžeme na rovnici aplikovat inverzi levé strany a tak dostat explicitní vztah pro y.

⑤ - Vyjádření $y(x)$

Dostáváme tedy dvě větve řešení a to

$$y(x) = \pm\sqrt{6\ln(1+e^x) + C} \qquad \begin{cases} \text{pro } x \in \mathbb{R} & \text{pokud je } C \geq 0 \\ \text{pro } x \in \left(\ln\left(e^{-\frac{C}{6}} - 1\right), \infty\right) & \text{pokud je } C < 0 \end{cases}$$



□

2.)

Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje řešení rovnice

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad \text{takové, že } y(-3) = -3 \text{ a } y(4) = a.$$

Řešení: Opět vezměme na pomoc (SP) kuchařku:

1 - Definiční obory

Definiční obor pro x je triviálně celé $\mathbb{R}$, stejně tak pro y díky absolutní hodnotě pod odmocninou.

2 - Stacionární řešení

Zde stacionární řešení existuje a to právě $y \equiv 0$.

3 - Separace proměnných

Dále hledejme netriviální řešení za předpokladu $y \neq 0$. Převedeme výrazy s y na levou stranu a integrujeme vzhledem k x.

$$\int \frac{y'}{\sqrt{|y|}}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x$$

Při integrálu nalevo si dáme pozor na absolutní hodnotu, musíme vynásobit (vydělit) výraz funkcí $\operatorname{sgn}(y)$.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{|y|}\operatorname{sgn}(y) &= x + \tilde{C} \\ \sqrt{|y|}\operatorname{sgn}(y) &= \frac{x}{2} - C \end{aligned}$$

Konstantu C jsme záměrně přejmenovali do tohoto tvaru, pozdější výsledky tak budou mít jednoduší tvar. Zde jsme nyní hotovi, přejdeme na klíčový krok 4.

4 - Omezení na obor x v závislosti na C

Mohlo by se zdát, že zde nám nepřibudou žádné omezení, jelikož funkce nalevo má obor hodnot všechna reálná, ale určité užitečné pozorování zde udělat můžeme.

Pokud bude y nabývat kladných hodnot, musí platit $x > 2C$, naopak pokud by funkce y měla být záporná, má definiční obor pouze pro $x < 2C$. Za chvíli uvidíme, že tyto podmínky souvisí se skutečností, že funkce y je nutně neklesající (což vyplývá hned z tvaru zadané rovnice).

(5) - Vyjádření *y(x)*

Můžeme přistoupit k vyjádření y.

$$|y| = \left(\frac{x}{2} - C\right)^2$$

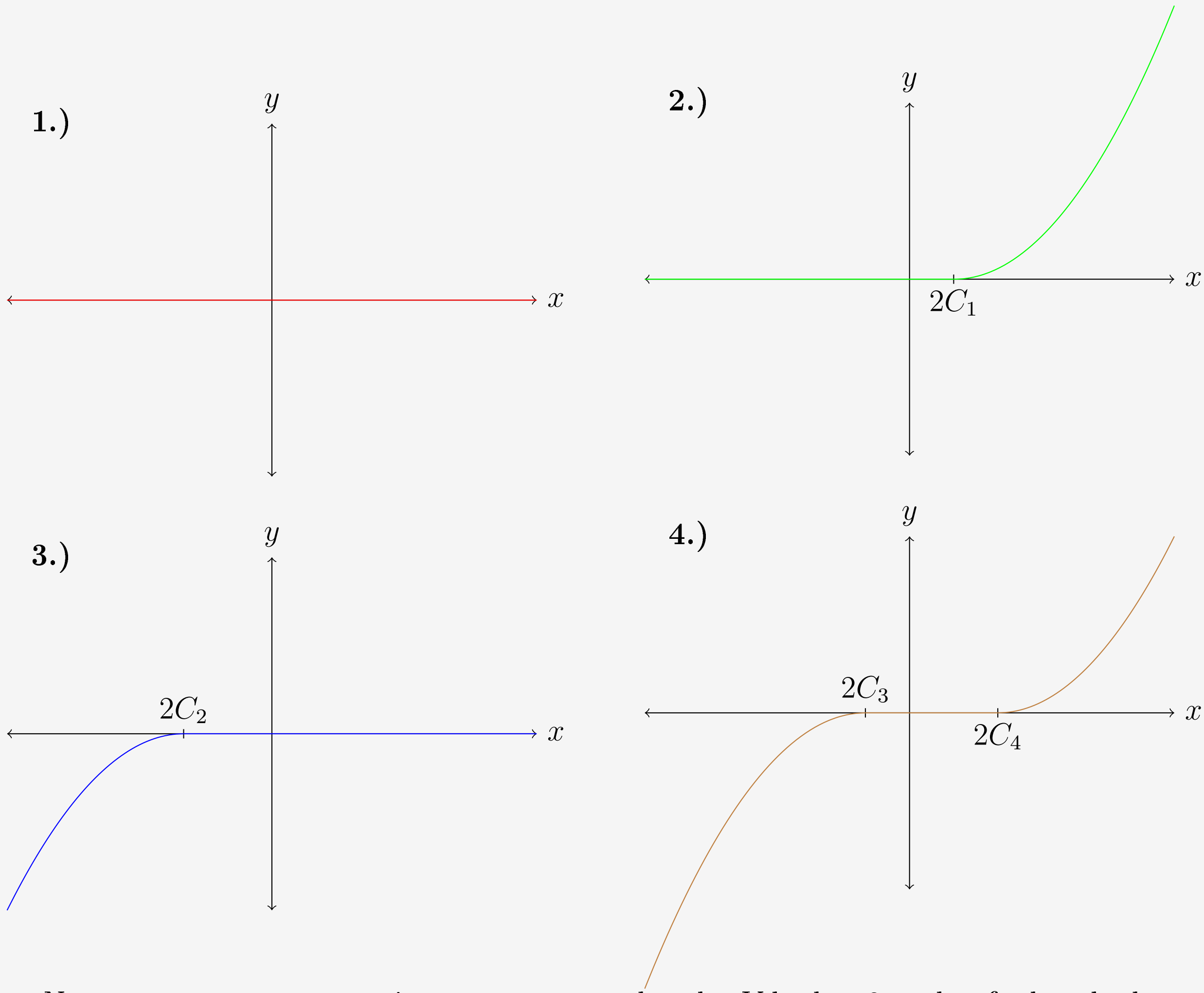
$$y = \pm\left(\frac{x}{2} - C\right)^2$$

Tyto větve však mají svůj vlastní definiční obor.

$$y_1(x) = -\left(\frac{x}{2} - C\right)^2 \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 2C)$$

$$y_2(x) = \left(\frac{x}{2} - C\right)^2 \qquad \text{pro } x \in (2C, \infty)$$

Všimneme si, že v krajním bodě $2C$ vždy nabýváme hodnoty 0, ze spojitosti funkce $\sqrt{|y|}$ v 0 tedy plyne, že jsme schopni řešení nalepit na stacionární. Řešení tak mohou být 4 různých typů:



Nyní na naše řešení napasujeme počáteční podmínky. V bodě -3 má být funkční hodnota taky -3, tudíž musíme v řešení mít větev, která se zespodu nalepí na osu x (tak jako v grafu **3.)** nebo **4.)**). Najděme příslušnou parabolu procházející tímto bodem.

$$\begin{aligned} -3 &= -\left(\frac{-3}{2} - \bar{C}\right)^2 \\ \sqrt{3} &= \pm\left(\frac{-3}{2} - \bar{C}\right) \\ \bar{C} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Víme však, že tato parabola musí bodem $[-3, -3]$ procházet svým levým ramenem, neboli musí platit $x = -3 < 2\bar{C}$. Proto platí $\bar{C} = -\frac{3}{2} + \sqrt{3}$.

Nyní diskutujme, jaké hodnoty může, řešení nabývat v bodě 4. Je zjevné, že do záporu se už dostat nemůžeme, ale je možné znovu se odlepit od stacionárního řešení a dostat kladnou hodnotu. Maximálního přípustného a dosáhneme pokud se odlepíme ihned v bodě $2\bar{C} = -3 + 2\sqrt{3}$. Hodnota $y(4)$ je pak

$$y(4) = \left(\frac{4}{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \frac{61}{4} - 7\sqrt{3} = 3.1256\ldots$$

Hledané hodnoty a jsou z intervalu $\left[0, \frac{61}{4} - 7\sqrt{3}\right] = [0, 3.1256\ldots]$.

$\square$