Domácí úkol 2

Termín odevzdání: 12. 3. 2025 do večera

1.)

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou

$$r = \sqrt[3]{\cos^2(2\theta) + 1} \qquad \text{pro } \theta \in [0, \pi]$$

kolem osy x.

Řešení: Pro výpočet rotačního tělesa ohraničeného křivkou zadanou v polárních souřadnicích máme samostatný vzoreček

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$

V našem případě je tedy nutné spočítat integrál

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \left[\cos^2(2\theta) + 1\right] \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \left[\left(2\cos^2(\theta) - 1\right)^2 + 1\right] \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \left[4\cos^4(\theta) - 4\cos^2(\theta) + 2\right] \sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \left| \begin{array}{c} t = \cos(\theta) \\ \mathrm{d}t = -\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta \\ 0 \mapsto 1 \\ \pi \mapsto -1 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi \int_1^{-1} 4t^4 - 4t^2 + 2\ \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t\right]_{-1}^{1} = \frac{88}{45}\pi.$$

□

2.)

Spočtěte povrch rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pro } x \in [0,1]$$

kolem osy x.

Řešení: Pro výpočet povrchu rotačního tělesa, které vzniklo rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x existuje vzorec

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \big|f(x)\big| \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\ \mathrm{d}x.$$

V našem případě je $f(x) = x^2$ a tedy $f'(x) = 2x$. Hledaný integrál je ve tvaru

$$S = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2}\ \mathrm{d}x$$

Je více způsobů jak tento integrál řešit, my zvolíme substituci s $\sinh(t)$.

$$S = \left| \begin{array}{c} 2x = \sinh(t) \\ 2\ \mathrm{d}x = \cosh(t)\ \mathrm{d}\theta \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto \tilde{t} = \operatorname{argsinh}(2) \end{array} \right| = \frac{\pi}{4} \int_0^{\tilde{t}} \sinh^2(t)\cosh^2(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \sinh(t) & \to u' = \cosh(t) \\ v' = \cosh^2(t)\sinh(t) & \to v = \frac{1}{3}\cosh^3(t) \end{array} \right| = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}\cosh^3(t)\sinh(t)\right]_0^{\tilde{t}} - \frac{\pi}{12}\int_0^{\tilde{t}} \cosh^4(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi - \frac{\pi}{12}\int_0^{\tilde{t}} \cosh^2(t) + \cosh^2(t)\sinh^2(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\frac{4}{3}S = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi - \frac{\pi}{24}\int_0^{\tilde{t}} 1 + \cosh(2t)\ \mathrm{d}t = \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi - \frac{\pi}{24}\operatorname{argsinh}(2) - \frac{\pi}{48}\sinh\big(2\operatorname{argsinh}(2)\big) =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{6}\pi - \frac{\pi}{24}\operatorname{argsinh}(2) - \frac{\pi}{48} 2\sinh\big(\operatorname{argsinh}(2)\big)\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsinh}(2))}$$

$$S = \frac{5\sqrt{5}}{8}\pi - \frac{2\sqrt{5}}{32}\pi - \frac{\pi}{32}\operatorname{argsinh}(2) = \frac{\pi}{32}\Big(18\sqrt{5} - \operatorname{argsinh}(2)\Big) = \frac{\pi}{32}\left(18\sqrt{5} - \ln\Big(2+\sqrt{5}\Big)\right)$$

$\square$