Domácí úkol 10

Termín odevzdání: 23. 5. 2025 do večera

1.)

Uvažujme vazbu

$$\Phi(x, y, z) = z\cos(x) + \frac{2y^2 - y}{x^2 + z^2}.$$

Ukažte, že na okolí bodu $(0, 1, z(0, 1))$ lze definovat právě funkci $z(x, y)$, pro kterou bude platit $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$. Poblíž tohoto bodu nalezněte stacionární bod této funkce a vyšetřete zda jde o minimum, maximum nebo sedlový bod.

TIP: při počítání druhých derivací si můžete pomoct softwarem, nebo průběžně dosazujte za proměnné souřadnice stacionárního bodu, aby se výpočty redukovaly.

Řešení: Nejprve zkusíme z vazby dopočítat z-ovou souřadnici bodu, který by měl ležet na grafu funkce $z(x, y)$.

$$0 = \Phi(0, 1, z(0, 1)) = z(0, 1)\cos(0) + \frac{2-1}{z^2(0, 1)} = z(0, 1) + \frac{1}{z^2(0, 1)}$$

Z toho je vidět, že nutně musí $z(0, 1) = -1$.

Nyní se podívejme na to, jestli na okolí tohoto bodu existuje funkce $z(x, y)$. Podíváme se na parciální derivaci vazbové funkce Φ vzhledem k z. Postačující podmínka k lokální existenci je, že tato derivace nesmí být na okolí bodu nulová. Ze spojitosti funkce Φ a jejích derivací na definičním oboru pak usoudíme, že stačí prověřit nenulovost právě v našem bodě (pokud bude nenulová v $(0, 1, -1)$, pak bude jistě nenulová i na malém okolí).

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(\cos(x) - \frac{(2y^2 - y)2z}{(x^2 + z^2)^2}\right)\Bigg|_{(x,y,z)=(0,1,-1)} = 1 - \frac{-2}{1} = 3 \neq 0$$

Funkci $z(x, y)$ opravdu mohu zadefinovat na nějakém okolí bodu $(0, 1, -1)$.

Pokud chceme najít stacionární bod této funkce, musíme vypočítat první parciální derivace. Pro to využijeme vzorečky pro derivace implicitní funkce

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}$$

Vypočtěme proto potřebné parciální derivace funkce Φ.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -z\sin(x) - \frac{(2y^2 - y)2x}{(x^2 + z^2)^2}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{4y - 1}{x^2 + z^2}$$

Tudíž

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-z\sin(x) - \frac{(2y^2-y)2x}{(x^2+z^2)^2}}{\cos(x) - \frac{(2y^2-y)2z}{(x^2+z^2)^2}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{4y-1}{x^2+z^2}}{\cos(x) - \frac{(2y^2-y)2z}{(x^2+z^2)^2}}.$$

Stacionární bod se vyznačuje nulovými derivacemi, nám zadání udává nelézt alespoň jeden, to je třeba právě bod $(0, \frac{1}{4})$. Pro jistotu se podíváme, zda i v tomto bodě je funkce $z(x, y)$ dobře definována.

$$0 = \Phi\left(0, \frac{1}{4}, z\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) = z\left(0, \frac{1}{4}\right)\cos(0) + \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{z^2\left(0, \frac{1}{4}\right)} = z\left(0, \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8z^2\left(0, \frac{1}{4}\right)}$$
$$z\left(0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Dosaďme do

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(\cos(x) - \frac{(2y^2-y)2z}{(x^2+z^2)^2}\right)\Bigg|_{(x,y,z)=\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)} = 1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = 3 \neq 0,$$

Shodou okolností nám opět vyšla 3, což je nicméně nenulová hodnota, tedy i na nějakém okolí tohoto bodu je funkce dobře definována a my se můžeme podívat jestli je bod $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ vzhledem k tomuto okolí extrémem. Spočítejme druhé derivace. Ve výpočtu dostaneme vskutku složité výrazy, mějme ovšem na paměti, že ve finále budeme dosazovat souřadnice bodu $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, leckteré vzorečky tak nemusíme dopočítavat až do konce (zvlášť dosazení $x = 0$ nám to zjednoduší).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\sin(x) + z\cos(x) + \frac{2(2y^2-y)}{(x^2+z^2)^2} - \frac{4x(2y^2-y)(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})}{(x^2+z^2)^3}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} =$$
$$= \frac{(0 + \frac{1}{2} - 4) \cdot 3 - 0}{3^2} = -\frac{7}{6}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \sin(x) \cdot C_1(x, y, z) + x \cdot C_2(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\left(\frac{-4}{x^2+z^2} - \frac{(1-4y)2z\frac{\partial z}{\partial y}}{(x^2+z^2)^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2} = \frac{(-4 \cdot 4 - 0) \cdot 3 - 0}{3^2} = -\frac{16}{3}$$

Hessova matice má tedy jednoduchý diagonální tvar

$$H_z = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

a je tedy zjevně negativně definitní (vlastní čísla jsou přímo na diagonále). Funkce $z(x, y)$ má tedy v bodě $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ lokální maximum.

$\square$

2.)

Řešte rovnici

$$y^2 \ \mathrm{d}x + (xy - 1) \ \mathrm{d}y = 0.$$

Nejprve se přesvědčte, že rovnice není ve tvaru totálního diferenciálu. Poté rovnici přenásobte vhodným integračním faktorem $\mu(y)$.

Řešení: Označme $M(x,y) = y^2$ a $N(x,y) = xy - 1$. Vidíme, že máme rovnici rozdělenou na tvar

$$M(x,y) \ \mathrm{d}x + N(x,y) \ \mathrm{d}y = 0.$$

Aby šlo o rovnici ve tvaru totálního diferenciálu, musí být vektorové pole $(M(x,y), N(x,y))$ gradientem nějakého potenciálu $U(x,y)$. Rotace tohoto vektorového pole musí být proto identicky rovna 0.

$$\operatorname{rot}(M(x,y), N(x,y)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = y - 2y = -y \neq 0$$

Nemáme pole s identicky nulovou derivací, nemůžeme pokračovat přímým postupem. Zadání nás nabádá k nalezení vhodného integračního faktoru $\mu(y)$. Přenásobme tedy rovnici touto neznámou funkcí a testujme podmínku znovu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}(x,y) &= 2\mu(y)y + \mu'(y)y^2 \\ \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}(x,y) &= \mu(y)y \end{aligned}$$

Dostáváme jednoduchou ODR pro $\mu(y)$. Tu řešíme přes separaci proměnných.

$$\begin{aligned} \mu'(y)y^2 &= -\mu(y)y \\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= -\frac{1}{y} \\ \int \frac{1}{\mu} \ \mathrm{d}\mu &= -\int \frac{1}{y} \ \mathrm{d}y \\ \ln|\mu(y)| &= -\ln|y| + C \\ \mu(y) &= \frac{C_1}{y} \end{aligned}$$

Integrační faktor je vždy určen až na multiplikativní konstantu, tu si můžeme zvolit podle naší pohodlnosti třeba $C_1 = 1$.

Máme tedy novou rovnici (Označme $\tilde{M}(x,y) = y$ a $\tilde{N}(x,y) = x - \frac{1}{y}$)

$$y \ \mathrm{d}x + \left(x - \frac{1}{y}\right) \ \mathrm{d}y = 0,$$

pro kterou již platí

$$\operatorname{rot}\left(\tilde{M}(x,y),\tilde{N}(x,y)\right)=\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(x,y)=1-1\equiv 0.$$

Potenciál tedy existuje a platí pro něj

$$\nabla U(x,y)=\left(\tilde{M}(x,y),\tilde{N}(x,y)\right),$$

najdeme ho tedy integrováním funkcí $\tilde{M}$ a $\tilde{N}$ podle příslušných proměnných.

$$\int \tilde{M}(x,y)\ \mathrm{d}x=\int y\ \mathrm{d}x=xy+C(y)$$
$$\int \tilde{N}(x,y)\ \mathrm{d}y=\int x-\frac{1}{y}\ \mathrm{d}y=xy-\ln|y|+D(x)$$

Z toho plyne, že $C(y)=-\ln|y|$ a $D(x)=0$. Máme tedy potenciál

$$U(x,y)=xy-\ln|y|.$$

Tam, kde $y\neq 0$ má rovnice

$$yx'(y)+\left(x(y)-\frac{1}{y}\right)=0$$

obecné řešení

$$xy-\ln|y|=C$$

pro nějakou konstantu $C\in\mathbb{R}$.

$\square$