Domácí úkol 1

Termín odevzdání: 5. 3. 2025 do cvičení

1.)

Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_0^{3\pi} \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx$$

Řešení: K nalezení integrálu použijeme klasický Newtonův vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x),$$

kde F je nějaká primitivní funkce k f. Spočtěme tedy nejprve neurčitý integrál, abychom nalezli F. Tento postup volíme hlavně proto, že nás čeká substituce $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, pro kterou neplatí jeden z předpokladů věty *o substituci pro určitý integrál* a to konkrétně, že $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ má derivaci se stejným znaménkem na celém $(0, 3\pi)$. (Funkce $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ zjevně nemá derivaci v bodě π).Počítejme tedy:

$$\int \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx = \left|\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\left(\tfrac{x}{2}\right) \\ x &= 2\operatorname{arctg}(t) \\ dx &= \tfrac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin(x) &= \tfrac{2t}{1+t^2} \end{aligned}\right| = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt = \left|\begin{aligned} s &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}t+\tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ ds &= \tfrac{2}{\sqrt{3}}t\,dt \end{aligned}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{s^2+1}\,ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C_k \qquad \text{pro } x\in(2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi)$$

Samozřejmě ještě nejsme hotovi, tato funkce není spojitá v bodech $2k\pi+\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$, proto musíme lepit (pro naše potřeby stačí nalepit v bodě π). Spočtěme tedy jednostranné limity

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}+C_0$$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}+C_1.$$

Proto $C_1 = C_0 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Položme bez újmy na obecnosti konstantu $C_0 = 0$ a zapišme předpis primitivní funkce.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2k\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x\in(2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi) \\ \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = 2k\pi+\pi \end{cases}$$

Nyní můžeme bez problému dosazovat do vzorečku.

$$\lim_{x \to 3\pi} F(x) - \lim_{x \to 0} F(x) = \frac{3\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$$

$\square$

2.)

Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{R}$ konverguje integrál

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\arccos^p\left(1 - \frac{1}{\ln^6(x)+1}\right)}{x}\, dx.$$

HINT: Použijte limitní srovnávací kritérium a vzpomeňte si na limitu

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$$

Řešení: Postupujme podle nápovědy. Spočtěme limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arccos^p\left(1 - \frac{1}{\ln^6(x)+1}\right) x}{x\sqrt{\frac{1}{\ln^6(x)+1}}^{\,p}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\arccos^p(1-y)}{\sqrt{y}^{\,p}} = \sqrt{2}^{\,p},$$

kde jsme využili věty *o limitě složené funkce* a ověřili jsme si předpoklad, že vnitřní funkce $\frac{1}{\ln^6(x)+1}$ jde do nuly monotónně na okolí nekonečna. Jelikož nám limita vyšla **konečná a nenulová**, můžeme místo integrálu v zadání vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\ln^6(x)+1}\right)^{\frac{p}{2}}}{x}\, dx.$$

Jejich konvergence je totiž ekvivalentní. Jděme ještě o krok dále a opět si pomocí limitního srovnávacího kritéria převeďme integrand do jednoduššího tvaru.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\ln^6(x)+1}\right)^{\frac{p}{2}} x}{x\left(\frac{1}{\ln^6(x)}\right)^{\frac{p}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln^6(x)}{\ln^6(x)+1}\right)^{\frac{p}{2}} = 1$$

Opět jsme využili větu *o limitě složené funkce* a třeba předpokladu, že vnější funkce $x^{\frac{p}{2}}$ je spojitá v 1. Stačí proto zkoumat konvergenci integrálu

$$\int_{10}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\ln^6(x)}\right)^{\frac{p}{2}}}{x}\, dx = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x\left|\ln(x)\right|^{3p}}\, dx = \underbrace{\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x\ln^{3p}(x)}\, dx}_{x\in(10,\infty):\ln(x)>0}$$

Tento integrál již jsme schopni dopočítat analyticky bez větších problémů, použijeme *první větu o substituci.*

$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x\ln^{3p}(x)}\, dx = \left|\begin{array}{c} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x}\, dx \\ 10 \to \ln(10) \\ \infty \to \infty \end{array}\right| = \int_{\ln(10)}^{\infty} \frac{1}{t^{3p}}\, dx$$

Výsledek konverguje pouze pokud platí $3p > 1$ a tedy také původní integrál konverguje pro $p > \frac{1}{3}$.

$\square$